Lösungen zur ersten Klausur

Es handelt sich <u>nicht</u> um eine Musterlösung – für volle Punktzahl müssen fehlende (Rechen-)schritte ergänzt werden!

Aufgabe 1

Am einfachsten schreibt man den inhomogenen Teil direkt mit in die erweiterte Matrix und bringt dies auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -13 & -10 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 8 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II.+I. \\ III.+I. \\ IV.-I. \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile sieht man bereits, dass das inhomogene System keine Lösung hat. Damit ist Teil b) beantwortet. Nun reicht es, die letzte Spalte auszulassen. 1P

Nach einigen Rechnungen ergibt sich als Zeilennormalform (diese ist eindeutig!)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich sofort ablesen, dass

$$L_{hom} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dies beantwortet Teil a).

Rechenfehler: − 1P
unerlaubte Umformung: − 2P

Fehler beim Abschreiben −0,5P
Nur b) gelöst, aber Rechnung wäre für a) nutzbar +1P
Nur b) gelöst, aber Matrix in ZSF +2P

a) Kein. Lösung −2P.
b) Keine Begründung −0,5 P.

Aufgabe 2

3 (a)

$$\chi_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda-2)\,(\lambda^2+2\lambda+2) = \underline{\underline{-(\lambda-2)^2(\lambda-1)}}$$

[Es genügt und ist für weitere Rechnungen auch sinnvoller, χ_f in faktorisierter Form anzugeben. Die ausmultiplizierte Lösung ist natürlich auch ok: $\chi_f(\lambda) = -\lambda^3+2\lambda+4$]

1 (b) $\chi_f(\lambda) = 0 \iff -(\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0 \iff \lambda = 2$ oder $\lambda = 1$

Also sind $\lambda_1 = 2$ (alg. Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = 1$ (alg. Vielf. 1) die Eigenwerte von f.

4 (c)

$$E_f(2) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

natürlich andere Wahl der Basis möglich.

$$E_f(1) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2 (d) Es gilt:

(geom. Vielfachheit von $\lambda_1 = 2$) = 2 = (alg. Vielfachheit von $\lambda_1 = 2$)

und (" " " $\lambda_2 = 1$) = 1 = (" " " $\lambda_2 = 1$)

Folglich ist f diagonalisierbar.

$\boxed{\text{Rechenfehler } -0.5\text{ P}}$

Aufgabe 3

(a) Bist Basis von U: Zu zeigen ist, dass B lin. unabhängig ist
1 und U aufspannt.

- Bist linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

- $\langle B \rangle = U$: "$\subseteq$": Es gilt

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$, da $2 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1$.

und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, da $2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0$. Also gilt $\langle B \rangle \subseteq U$.

"$U \subseteq \langle B \rangle$": Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$. Dann ist $x = 2y + 2z$, also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \langle B \rangle.$$

1 B' ist Basis von U: Nach dem vorherigen Teil wissen wir, dass $\dim U = 2$. Folglich genügt es, eine der folgenden beiden Tatsachen zu zeigen:

- $\langle B' \rangle \subseteq U$ und B' ist linear unabhängig:
  $\langle B' \rangle \subseteq U$ ist leicht nachzuprüfen.
  Lineare Unabh. kann auch explizit gezeigt werden (wie oben).

oder
- $\langle B' \rangle = U$:
  $\langle B' \rangle \subseteq U$ leicht nachzuprüfen.
  Für $U \subseteq \langle B' \rangle$ kann z.B. gezeigt werden, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \langle B' \rangle$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle B' \rangle$. [...]

0,5 C ist Basis von U, da C die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

1 C' ist Basis von V: Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, genügt es zu zeigen, dass C' linear unabhängig ist, oder dass $\langle C' \rangle = \mathbb{R}^3$.

[...]

Aufgabe 3 (Fortsetzung)

(b) Es gilt

$${}_{C'}M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_{C}M_{B}(f) \cdot L_B \cdot B' , \qquad (*)$$

wobei B, B', C, C' als Matrizen aufgefasst werden und $L_{C'}$, L_B Linksinverse von C' bzw. B sind.
Mit dem üblichen Verfahren können $L_{C'}$ und L_B berechnet werden: [...]

② $L_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (zum Beispiel; es gibt mehrere Wahlen für L_B)

③ $L_{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (dies ist eindeutig!)

Damit erhält man nach $(*)$

7,5

$${}_{C'}M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind. Pro Aufgabenteil können mehrere Aussagen richtig sein.

Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.

---

(1) Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so gilt für die Mächtigkeit der Vereinigung $A \cup B$:

☒ $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

☐ $|A \cup B| \geq |A| + |B|$

☐ $|A \cup B| = |M| - |A \cap B|$

(2) Eine Abbildung von Mengen $f\colon A \to B$ ist genau dann surjektiv, wenn gilt:

☐ $f^{-1}(B) = A$

☒ $f(A) = B$

☒ Jede Faser von B enthält mindestens ein Element.

(3) Welche der folgenden „Abbildungen" ist *nicht* wohldefiniert?

☒ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

☐ $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \mapsto \frac{p^2}{q^2}$

☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$

(4) Welche der folgenden Abbildungen ist bijektiv?

☐ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$

☒ $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x$

☐ $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$

(5) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen endlichen Mengen A und B ist genau dann bijektiv, wenn

☒ A und B gleich viele Elemente besitzen und f surjektiv ist.

☒ A und B gleich viele Elemente besitzen und f injektiv ist.

☐ $A = B$ ist.

(6) Für jeden Vektorraum V ist die Teilmenge $V \setminus \{0\}$

☐ linear unabhängig.

☒ ein Erzeugendensystem.

☐ ein Untervektorraum.

(7) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, -3y)$ wird bezüglich der Standardbasis durch folgende Matrix beschrieben:

☐ $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(8) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ vom Rang $\mathrm{rk}(A) < n$

☒ besitzt 0 als Eigenwert.

☐ besitzt keine Eigenwerte.

☐ besitzt höchstens $n - 1$ verschiedene Eigenwerte.

Aufgabe 5

2 (a) Zum Beispiel die Identität und der Nullhomomorphismus.

4 (b) Beh.: Sei $p: V \to V$ idempotent. Dann ist

$$\ker(p) + \operatorname{im}(p) = V$$

Beweis: "$\subseteq$" ist klar.

"$\supseteq$": Sei $v \in V$. Dann gilt

$$p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = p(v) - p(v) = 0.$$

Also ist $x := v - p(v) \in \ker(p)$. Damit ist

$$v = x + p(v) \in \ker(p) + \operatorname{im}(p). \qquad \square$$

4 (c) Beh.: Sei $p: V \to V$ idempotent. Dann ist

$$\ker(p) \cap \operatorname{im}(p) = \{0\}.$$

Beweis: "$\supseteq$" ist klar.

"$\subseteq$": Sei $v \in V$ mit $v \in \ker(p) \cap \operatorname{im}(p)$.

Dann gilt:

$$p(v) = 0$$

und $\exists w \in V: \ v = p(w)$.

$$\Rightarrow \quad 0 = p(v) = p^2(w) \underset{\uparrow \text{ p idempotent}}{=} p(w) = v, \text{ also } v = 0.$$

$\square$

Aufgabe 6

4 (a) ~ ist reflexiv: Sei $A \in Mat_{\mathbb{R}}(m \times n)$. Dann ist

$$A = E_m^{-1} A E_n \quad , \quad \text{also gilt } A \sim A.$$

~ ist symmetrisch: Sei $A \sim A'$. Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in Mat_{\mathbb{R}}(m \times m)$, $T \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$, so dass

$$A' = S^{-1} A T$$

$$\Rightarrow (S^{-1})^{-1} A' (T^{-1}) = A \Rightarrow A' \sim A.$$

~ ist transitiv: Seien $A \sim A'$ und $A' \sim A''$. Dann existieren invertierbare $S, S' \in Mat_{\mathbb{R}}(m \times n)$, $T, T' \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit

$$A' = S^{-1} A T \quad \text{und} \quad A'' = (S')^{-1} A' T'$$

$$\Rightarrow A'' = (SS')^{-1} A (TT') \Rightarrow A \sim A''.$$

6 (b) Folgende Tatsachen sind aus der Vorlesung bekannt:

(+) Sei $A \in Mat_{\mathbb{R}}(m \times n)$ und seien $T \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $S \in Mat_{\mathbb{R}}(m \times m)$ invertierbar. Dann gilt $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(SAT)$. Außerdem existieren invertierbare $S \in Mat_{\mathbb{R}}(m \times m)$ und $T \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$ mit

$$S^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & & & 1\ 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Behauptung: Es gibt insgesamt $1 + \min\{m, n\}$ Äquivalenzklassen und die Matrizen der Form (*) bilden ein vollst. Repräsentantensystem.

Beweis: Per Satz (+) impliziert, dass jede $(m \times n)$-Matrix äquivalent zu einer Matrix der Form (*) ist. Außerdem haben nach (+) äquivalente Matrizen denselben Rang; folglich sind zwei verschiedene $(m \times n)$ Matrizen der Form $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (also *) nicht äquivalent, da sie unterschiedlichen Rang haben. Folglich bilden die Matrizen $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ein vollst. Rep.system der Äquivalenzklassen. Nun sieht man, dass es genau $1 + \min\{m, n\}$ dieser Matrizen gibt, nämlich

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} E_{\min\{m,n\}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square$$